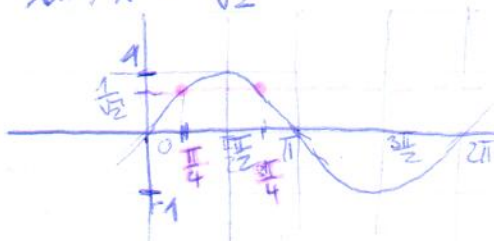


1, a) $\log_{10} x = 3$
 $x = 10^3$
 $x = 1000$

b) $2^x = \frac{1}{2}$
 $2^x = 2^{-1}$ rovnají-li se základ
 $x = -1$ rovnají se expon

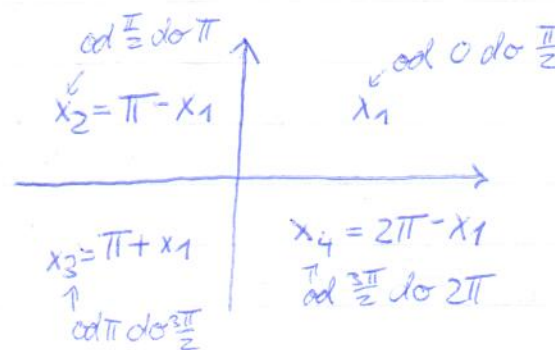
c) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$



+ periodicnost sinu

řešení $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



d) $\log_{10} x + \frac{4}{\log_{10} x} = 4$, subst $y := \log_{10} x$

$y + \frac{4}{y} = 4$

! $y \neq 0$ - podmínka

$y^2 + 4 = 4y$

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$(y-2)^2 = 0$

$y = 2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 $A = y, B = 2$

zpětná substituce: $\log_{10} x = 2$

$x = 10^2$

$x = 100$

2, $4\cos^2 x + 3 = 8\cos x$, subst $y := \cos x$ (tj y nabývá hodnot od -1 do 1)

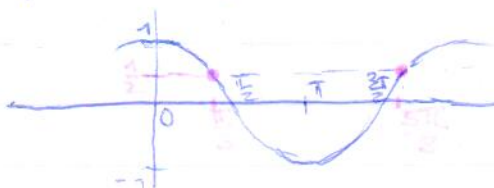
$4y^2 + 3 = 8y$

$4y^2 - 8y + 3 = 0$

$y_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8}$

$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

zpětná substituce: $\cos x = \frac{1}{2}$



$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$1) f) 3 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 3$$

substituce: $y = 2^x$

pak $2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$

dostaneme rci: $3y^2 + 8y - 3 = 0$

Vyřešíme pomocí diskriminantu. Dostaneme řešení: $y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = -3$

Provedeme desubstituci: $y = \frac{1}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$

$y = -3 \Rightarrow 2^x = -3$ nelze (a^x není nikdy záporné)

Výsledek: $x = \log_2 3$

$$1) g) \sin 2x = \cos x$$

použijeme vzorec $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

Rozdělíme na případ, kdy $\cos x = 0$ a kdy $\cos x \neq 0$ (pak se da' dělit)

- $\cos x = 0$

↓
pak rovnice platí

stačí vyřešit rci $\cos x = 0$

z grafu plyne, že řešení je $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

- $\cos x \neq 0$ - tj. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

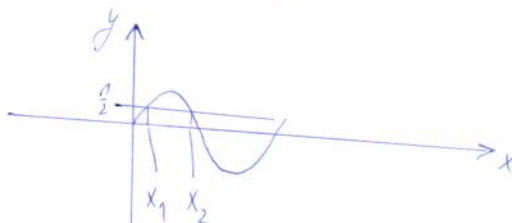
pak se da' rovnice vydělit výrazem $\cos x \neq 0$

dostaneme $2 \sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$



→ $x \in \{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5}{6}\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ - každé z těchto čísel vyhovuje podmínce $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Sloučíme výsledky z obou vět - výpočtu a dostaneme výsledek:

$x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5}{6}\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$1) b) \log(x^2+1) = 2 \log(3-x)$$

použijeme vzorec $s \cdot \log_a x = \log_a x^s$

$$\log(x^2+1) = \log(3-x)^2$$

logaritmus je prostá funkce $\Rightarrow$ přejdeme k rovnosti argumentu

$$x^2+1 = (3-x)^2$$

$$x^2+1 = 9-6x+x^2$$

$$6x = 8$$

$$\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$$

a ověříme, že $\frac{4}{3}$ vyhovuje podmínkám: $(\frac{4}{3})^2 + 1 > 0 \quad \checkmark$

$$3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} > 0 \quad \checkmark$$

$$1) i) e^x + 12 \cdot e^{-x} = 7$$

Substituce: $y = e^x$ Pak $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

$$y + \frac{12}{y} = 7 \quad | \cdot y$$

Ize násobit y , neboť víme, že e^x je vždy kladné, tedy nenulové

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

Věkory mree / discriminant $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

$$y = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$2) a) (x-2)(x+3) \geq 4x-8$$

$$(x-2)(x+3) - 4(x-2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+3-4) \geq 0$$

mění znaménko $\uparrow x=2$ $\uparrow x=1$

$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
+	-	+

tedy $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

$\uparrow$ včetně, protože máme neostrov nerovnost

b) $\frac{2x^2+1}{x^2+2x+2} < 1 \quad \forall x^2+2x+2 \neq 0$ - podmínky: $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2x^2+1-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} < 0$$

$$\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x+2} < 0$$

$$x^2-2x-1 = (x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

mění znaménko pro $x=1-\sqrt{2}$ a $x=1+\sqrt{2}$

$(-\infty, 1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2}, \infty)$
+	-	+

tedy $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

c) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1 \quad \forall 2x-8 \neq 0$ - podmínky $x \neq 4$

$$\frac{x-2-(2x-8)}{2x-8} \geq 0$$

$$\frac{-x+6}{2x-8} \geq 0$$

mění znaménko pro $x=4$ a $x=6$

$(-\infty, 4)$	$(4, 6)$	$(6, \infty)$
-	+	-

tedy $x \in (4, 6)$ (neostrov nerovnost + přidání podmínek)

d) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6} \quad \forall x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \quad \text{a} \quad x+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -6$

$$\frac{(x+2)(x+6)-(x+3)(2x+3)}{(x+3)(x+6)} > 0$$

$$(x+2)(x+6) = x^2+8x+12$$

$$(x+3)(2x+3) = 2x^2+9x+9$$

$$\frac{-x^2-x+3}{(x+3)(x+6)} > 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{-2} = < -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

mem' znaménko: $x = -6, x = -3, x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$-\frac{(x + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}))(x + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}))}{(x+3)(x+6)}$	$(-\infty, -6)$	$(-6, -3)$	$(-3, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2})$	$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2})$	$(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \infty)$
	-	+	-	+	-

tedy $x \in (-6, -3) \cup (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2})$

e) $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2} \quad \nabla \quad x \neq 2 \text{ a } x^2+3x-4 \neq 0$

$\hookrightarrow (x+4)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -4, x \neq 1$

$$\frac{(x+2)(x-2) - 3(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x^2-4 - (3x^2+9x-12)}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2-9x+8}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$x_1 = -\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{145}}{4} - \frac{9}{4}$$

$-\frac{(x + (\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{145}}{4}))(x + (\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4}))}{(x+4)(x-1)(x-2)}$	$(-\infty, -\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4})$	$(-\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4}, -4)$	$(-4, -\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{145}}{4})$	$(-\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{145}}{4}, 1)$	
	+	-	+	-	
	$(1, 2)$	$(2, \infty)$			
	+	-			

tedy $x \in (-\infty, -\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4}) \cup (-4, -\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{145}}{4}) \cup (1, 2)$

f) $||x-1|-2| < 1$

I. $x \in (-\infty, 1)$

$|-(x-1)-2| < 1$

$|-x-1| < 1$

I. $x \in (-\infty, -1)$

$-x-1 < 1$

$-2 < x$

$\nexists x \in (-2, -1)$

II. $x \in (-1, 1)$

$x+1 < 1$

$x < 0$

$\nexists x \in (-1, 0)$

dohromady $x \in (-2, 0) \cup (2, 4)$

II. $x \in (1, \infty)$

$|x-1-2| < 1$

$|x-3| < 1$

I. $x \in (1, 3)$

$3-x < 1$

$2 < x$

$\nexists x \in (2, 3)$

II. $x \in (3, \infty)$

$x-3 < 1$

$x < 4$

$\nexists x \in (3, 4)$

$$g) |2x+3| + |2x+5| > |x-1|$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$x = 1$$

musíme' body abs. hodnot

$$I. x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$$

$$II. x \in (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$III. x \in (-\frac{3}{2}, 1)$$

$$IV. x \in (1, \infty)$$

$$-2x-3-2x-5 > 1-x$$

$$-2x-3+2x+5 > 1-x$$

$$2x+3+2x+5 > 1-x$$

$$2x+3+2x+5 > x-1$$

$$-4x-8 > 1-x$$

$$2 > 1-x$$

$$4x+8 > 1-x$$

$$4x+8 > x-1$$

$$-9 > 3x$$

$$x > -1$$

$$5x > -7$$

$$3x > -9$$

$$-3 > x$$

$$\emptyset$$

$$x > -\frac{7}{5}$$

$$x > -3$$

$$x \in (-\infty, -3)$$

$$x \in (-\frac{7}{5}, 1)$$

$$x \in (1, \infty)$$

$$\text{dohromady } x \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{7}{5}, \infty)$$

$$2) h) |x+2| > |x+1| + x$$

	$(-\infty, -2]$	$(-2, -1]$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+

$$(-\infty, -2] \quad |x+2| = -x-2, \quad |x+1| = -x-1$$

$$-x-2 > -x-1+x$$

$$x < -1$$

+ zohľadníme interval, na ktorom to riešime

$$\Rightarrow \underline{x \in (-\infty, -2]}$$

$$(-2, -1] \quad |x+2| = x+2, \quad |x+1| = -x-1$$

$$x+2 > -x-1+x$$

$$-3 < x$$

$$\Rightarrow \underline{x \in (-2, -1]}$$

$$(-1, \infty) \quad |x+2| = x+2, \quad |x+1| = x+1$$

$$x+2 > 2x+1$$

$$x < 1$$

$$\Rightarrow \underline{x \in (-1, 1)}$$

Spolučíme výsledky $\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty, 1)}}$

$$2) i) |x+1| - |x+3| < 1$$

	$(-\infty, -3]$	$(-3, -1]$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	-	+
$x+3$	-	+	+

$$(-\infty, -3]$$

$$-x-1+x+3 < 1$$

$$2 < 1 \text{ neplatí}$$

$$\underline{\emptyset}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\frac{5}{2}, \infty)}}$$

$$(-3, -1]$$

$$-x-1-x-3 < 1$$

$$-\frac{5}{2} < x$$

$$\underline{x \in (-\frac{5}{2}, -1]}$$

$$(-1, \infty)$$

$$x+1-x-3 < 1$$

$$-3 < 0 \text{ platí}$$

$$\underline{x \in (-1, \infty)}$$

$$2) j) |x+|x+2|| < 4x$$

Prechod $x < 0$, pak rovnice nemá riešenie (nezaťporne < zaťporne). Môžeme predpokladať, že $x \geq 0$

Pak $x+2 > 0$, teda $|x+2| = x+2$

$$\rightarrow \text{keď uvažovať nerovnicu} \quad |x+x+2| < 4x$$

$$|2x+2| < 4x$$

$$\text{a } 2x+2 > 0, \text{ pretože } x \geq 0$$

teda

$$2x+2 < 4x$$

$$x > 1, \text{ splňuje podmienku } x \geq 0$$

$$\underline{\underline{x \in (1, \infty)}}$$

$$2) k) x^2 + 1 - |x+2| > 0$$

	$(-\infty, -2]$	$(-2, \infty)$
$x+2$	-	+

$$(-\infty, -2]$$

$$x^2 + 1 - x - 2 > 0$$

$$D = 1 - 12 < 0$$



$$y = x^2 + x + 3 \text{ neprotína' ože } x$$

$$\text{a kladné' } \Rightarrow \cup$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 3 \text{ vždy kladné'}$$

$$\underline{x \in (-\infty, -2]}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)}}$$

$$(-2, \infty)$$

$$x^2 - x - 1 > 0$$

$$D = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} > -2$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty) \cap (-2, \infty)$$

$$\underline{\underline{x \in (-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)}}$$

$$2) e) \log_2 (x^2 + |x+6| - 1) > 0 = \log_2 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Podmínky: } x^2 + |x+6| - 1 > 0 \end{array} \right. \text{ splněno pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x^2 + |x+6| - 1 > 1$$

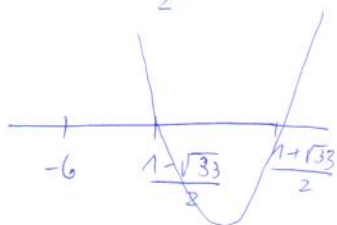
$$x^2 + |x+6| - 2 > 0$$

$$(-\infty, -6]$$

$$x^2 - x - 8 > 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 8 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$



$$\underline{\underline{x \in (-\infty, -6]}}$$

$$(-6, \infty)$$

$$x^2 + x + 5 > 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 5 < 0 \Rightarrow \cup$$

$$\underline{\underline{x \in (-6, \infty)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$$

$$2) m) \log_{\frac{1}{6}} (x^2 - 3x + 3) \leq 0 = \log_{\frac{1}{6}} 1$$

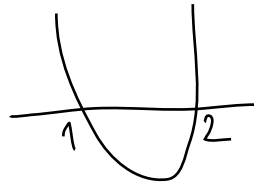
hlexi- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Podmin'log: } x^2 - 3x + 3 > 0 \end{array} \right.$

$$D = 9 - 12 < 0 \rightarrow \text{plati, v'zdy}$$

$$x^2 - 3x + 3 \geq 1$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$(x-2)(x-1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$$

$$3) a, |x(x+2)| > a$$

$|x(x+2)|$ je vždy nezáporné, tedy pro $a < 0$ je řešením $x \in \mathbb{R}$

pro $a \geq 0$: $x(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=-2)$

I. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

$$x(x+2) > a$$

$$x^2 + 2x - a > 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+a}$$

$$x \in (-\infty, -1-\sqrt{1+a}) \cup (-1+\sqrt{1+a}, \infty)$$

II. $x \in (-2, 0)$

$$-x(x+2) > a$$

$$0 > x^2 + 2x + a$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$$

$$x \in (-1-\sqrt{1-a}, -1+\sqrt{1-a})$$

$$a \in (0, 1)$$

Tedy: pro $a < 0$ je řešením $x \in \mathbb{R}$

pro $a \in (0, 1)$ je řešením

$$x \in (-\infty, -1-\sqrt{1+a}) \cup (-1-\sqrt{1-a}, -1+\sqrt{1-a}) \cup (-1+\sqrt{1+a}, \infty)$$

pro $a > 1$ je řešením

$$x \in (-\infty, -1-\sqrt{1+a}) \cup (-1+\sqrt{1+a}, \infty)$$

$$b) |x|-2 < a$$

$|x|-2$ je vždy nezáporné, tedy pro $a \leq 0$ nemá řešení
pro $a > 0$:

I. $x \in (-\infty, 0)$

$$|-x-2| < a$$

I. $x \in (-\infty, -2)$

$$-x-2 < a$$

$$-2-a < x$$

$$x \in (-2-a, -2)$$

II. $x \in (-2, 0)$

$$x+2 < a$$

$$x < a-2$$

$$x \in (-2, a-2)$$

II. $x \in (0, \infty)$

$$|x-2| < a$$

I. $x \in (0, 2)$

$$2-x < a$$

$$2-a < x$$

$$x \in (2-a, 2)$$

II. $x \in (2, \infty)$

$$x-2 < a$$

$$x < 2+a$$

$$x \in (2, 2+a)$$

Tedy: pro $a \leq 0$ řešení neexistuje

pro $a \in (0, 2)$ je řeš. $x \in (-2-a, a-2) \cup (2-a, 2+a)$

pro $a > 2$ je řeš. $x \in (-2-a, 2+a)$

$$c) |x^2+2x| < a+2x$$

$$\hookrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=-2)$$

I. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

$$x^2+2x < a+2x$$

$$x^2 < a$$

$a < 0$: x neexistuje

$$a > 0: -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$x \in (-\sqrt{a}, -2) \cup (0, \sqrt{a})$$

II. $(-2, 0) \ni x$

$$-x^2-2x < a+2x$$

$$0 < x^2+4x+a$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4a}}{2} = -2 \pm \sqrt{4-a}$$

$$x \in (-2, 0) \cap ((-\infty, -2-\sqrt{4-a}) \cup (-2+\sqrt{4-a}, \infty))$$

Dohromady:

$$\begin{aligned} a > 4 & \dots x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \\ 0 < a \leq 4 & \dots x \in (-2 + \sqrt{4-a}, \sqrt{a}) \\ a < 0 & \dots x \in \emptyset \end{aligned}$$

d) $a(a-1)x < 2^{2137} - 1$

↪ máme znaménko pro $a=0$ a $a=1$

pro $a=0$ a $a=1$ jsou řešením $x \in \mathbb{R}$

pro $a < 0$, nebo $a > 1$: $x < \frac{2^{2137}-1}{a(a-1)}$

řešením jsou $x \in (-\infty, \frac{2^{2137}-1}{a(a-1)})$

pro $a \in (0, 1)$: $x > \frac{2^{2137}-1}{a(a-1)}$

řešením jsou $x \in (\frac{2^{2137}-1}{a(a-1)}, \infty)$

e) $x^2 + ax < 0$

$x(x+a) < 0$

máme znaménko pro $x=0$ a $x=-a$

pro $a < 0$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, -a)$	$(-a, \infty)$
$x(x+a)$	+	-	+

tedy řešením jsou $x \in (0, -a)$

pro $a > 0$:

	$(-\infty, -a)$	$(-a, 0)$	$(0, \infty)$
$x(x+a)$	+	-	+

tedy řešením jsou $x \in (-a, 0)$

pro $a=0$: $x^2 < 0$ a řešení neexistuje

3) f) $|x| + |x+1| < a$

	$(-\infty, -1]$	$(-1, 0]$	$(0, \infty)$
x	-	-	+
$x+1$	-	+	+

$(-\infty, -1]$

$-x - x - 1 < a$

$x > \frac{-a-1}{2}$

• $\frac{-a-1}{2} \leq -1 \rightarrow$ paň $x \in (-\frac{a-1}{2}, -1]$

$-a-1 \leq -2$

$-a \leq -1$

$+1 \leq a$

• $a < 1$, paň $x \in \emptyset$

$(-1, 0]$

$-x + x + 1 < a$

$1 < a$

• $a \leq 1 \rightarrow x \in \emptyset$

• $a > 1 \rightarrow x \in (-1, 0]$

$(0, \infty)$

$x + x + 1 < a$

$x < \frac{a-1}{2}$

• $a \leq 1 \rightarrow x \in \emptyset$

• $a > 1 \rightarrow x \in (0, \frac{a-1}{2})$

Záver:

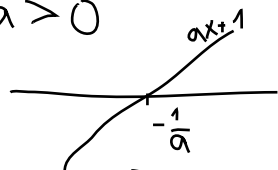
a	x
$(-\infty, 1)$	$\emptyset$
1	$\emptyset$
$(1, \infty)$	$(-\frac{a-1}{2}, \frac{a-1}{2})$

3) g)

a	x
0	$\mathbb{R}$
$(0, \infty)$	$(-\frac{3}{a}, -\frac{2}{a}] \cup [0, \frac{1}{a})$
$(-\infty, 0)$	$(\frac{1}{a}, 0] \cup [-\frac{2}{a}, -\frac{3}{a})$

3) g) $1 \leq |ax+1| < 2 \quad a=0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$a > 0$



$(-\infty, -\frac{1}{a}]$

$1 \leq -ax - 1 < 2$

$2 \leq -ax < 3$

$-\frac{2}{a} \geq x > -\frac{3}{a}$

$x \in (-\frac{3}{a}, -\frac{2}{a}]$

$(-\frac{1}{a}, \infty)$

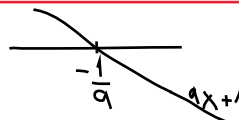
$1 \leq ax + 1 < 2$

$0 \leq ax < 1$

$0 \leq x < \frac{1}{a}$

$x \in [0, \frac{1}{a})$

$a < 0$



$(-\infty, -\frac{1}{a}]$

$1 \leq ax + 1 < 2$

$0 \geq x > \frac{1}{a}$

$x \in (\frac{1}{a}, 0]$

$(-\frac{1}{a}, \infty)$

$1 \leq -ax - 1 < 2$

$-\frac{2}{a} \leq x < -\frac{3}{a}$

$x \in [-\frac{2}{a}, -\frac{3}{a})$

3)h) $\frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}$ Podmínky: $x \neq 0, a \neq 0$

$$\frac{a^2-4}{ax} = \frac{(a-2)x}{ax} \quad | \cdot ax$$

$$a^2-4 = (a-2)x$$

$$a=2 \rightarrow 0=0 \checkmark$$

~~$$a=2 \rightarrow 0=-4x \rightarrow x \in \mathbb{R}$$~~

$$a \neq 2 \rightarrow \text{12e vydeřit}$$

$$x = \frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a+2)(a-2)}{a-2} = a+2$$

a	x
0	$\emptyset$
2	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$	$a+2$

3)i) $ax^2 + 2x + (2-a) = 0$

$$D = 4 - 4a(2-a) = 4(a-1)^2$$

Začít:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2(a-1)}{2a}$$

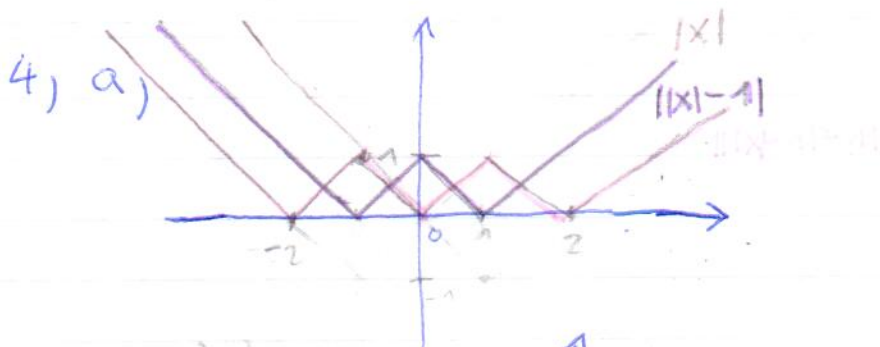
↑ pro $a \neq 0$

$$= \frac{-1 \pm (a-1)}{a} = \begin{cases} \frac{a-2}{a} \\ -1 \end{cases}$$

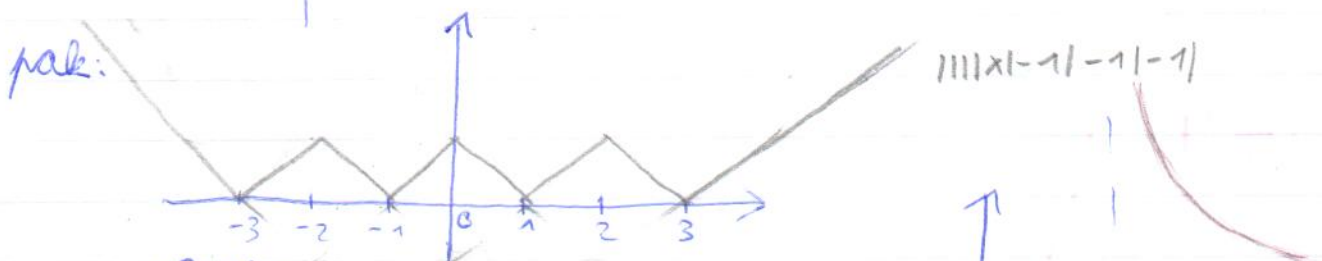
pro $a=0: 2x+2=0$

$$x = -1$$

a	x
0	-1
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\{-1, \frac{a-2}{a}\}$



$$f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$$



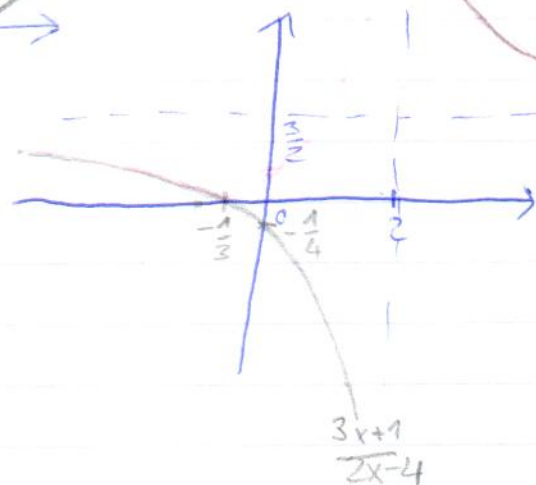
b) $f(x) = \left| \frac{3x+1}{2x-4} \right|$

$$\frac{3x+1}{2x-4} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2x-4} \quad x \neq 2$$

↑
присутствует

$$x=0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}$$

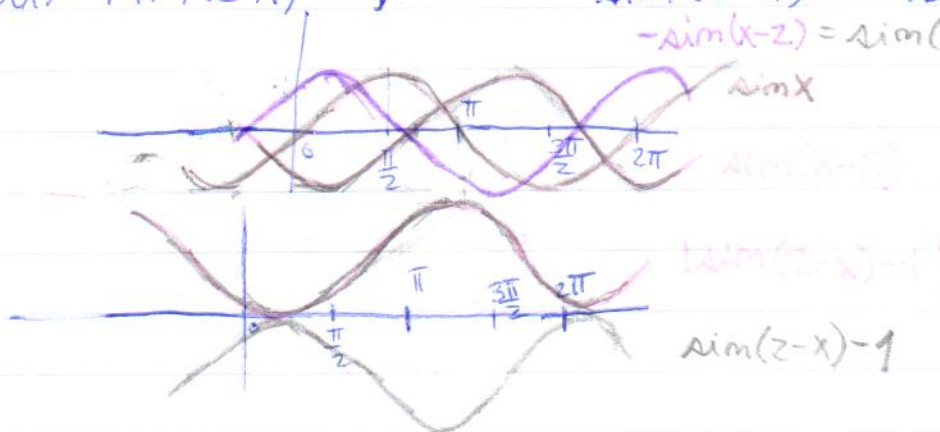
$$f(x)=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$



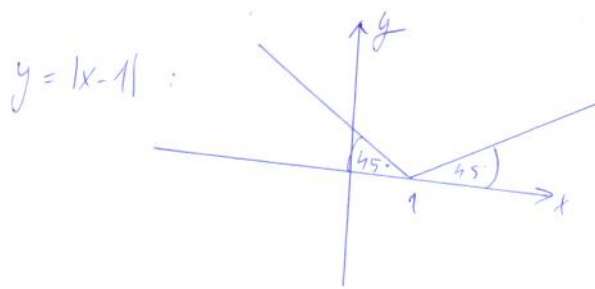
c) $f(x) = |\sin(2-x) - 1|$

$$\sin(2-x) = -\sin(x-2)$$

$$-\sin(x-2) = \sin(2-x)$$

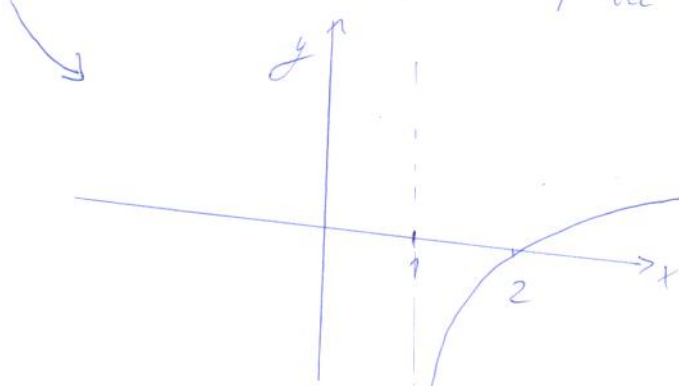


4)d) $f(x) = |\log|x-1||$

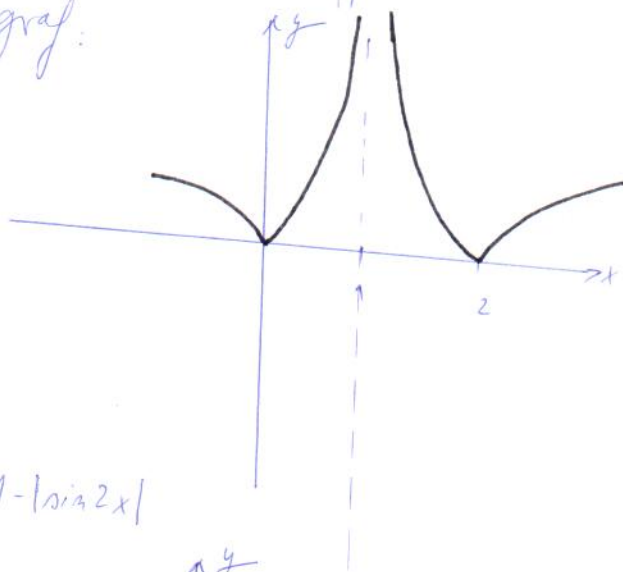


$\Rightarrow$ graf f je také osově symetrický - podle osy $x=1$

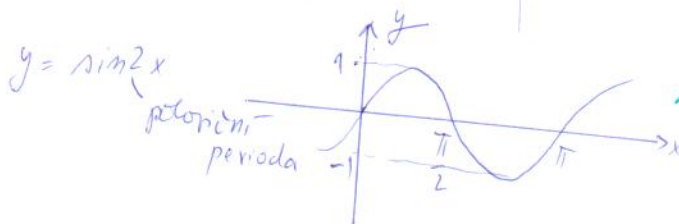
$y = \log(x-1)$ je $\log x$ posunutý o 1 doprava



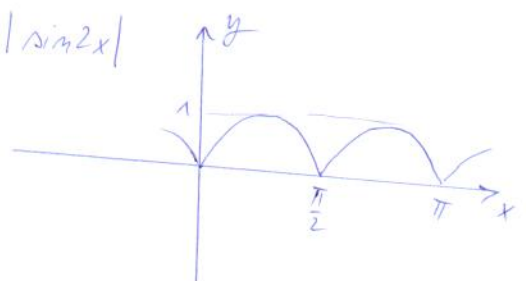
Vš sledy - graf:



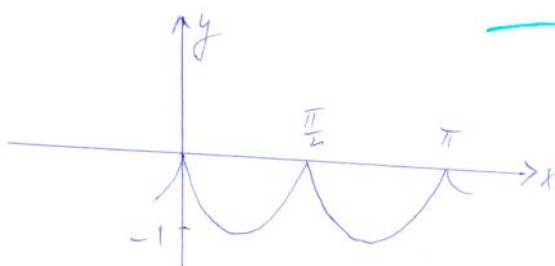
4)e) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$



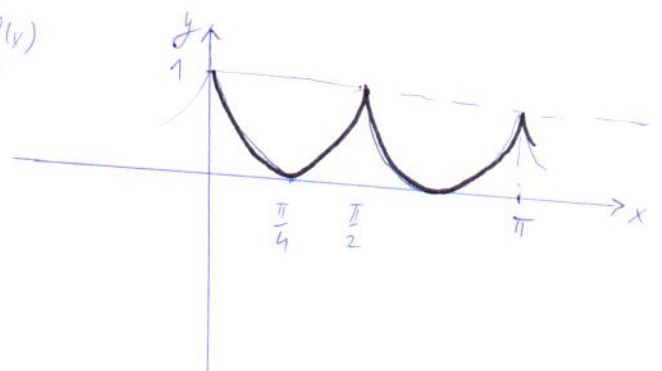
$y = |\sin 2x|$



$y = -|\sin 2x|$



$f(x)$



$$\begin{aligned} 5, a) \quad \sin 4x &= \sin(2 \cdot 2x) = 2 \sin(2x) \cos(2x) = \\ &= 2(2 \sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x \end{aligned}$$

5) b) użyjmy wzoru $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos(8x) = \cos(2 \cdot 4x) = 2 \cdot \cos^2(2 \cdot 2x) - 1 = 2 \cdot (2\cos^2(2x) - 1)^2 - 1 = 2(2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1)^2 - 1 =$$

$$= 2(2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1)^2 - 1 = 2(8\cos^4 x + (1 - 8\cos^2 x))^2 - 1 =$$

$$= 2(64\cos^8 x + 2 \cdot 8 \cdot \cos^4 x (1 - 8\cos^2 x) + (1 - 8\cos^2 x)^2) - 1 =$$

$$= 128\cos^8 x + 32\cos^4 x - 256\cos^6 x + 2(1 - 16\cos^2 x + 64\cos^4 x) - 1 =$$

$$= \underline{\underline{128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1}}$$

6) a) $q \neq 1$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{\text{IP}} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

induktion $\Rightarrow$ • $n=0$, falls $\sum_{k=0}^0 q^k = 1$ a. $= \frac{1-q}{1-q} = 1 \checkmark$

• $n \rightarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{IP}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q) q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}$$

□

6) b) induktion IP: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

• $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$$

• $n \rightarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n+1 \stackrel{\text{IP}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

□